Πραγματική Ανάλυση 08|01|17 1

$$f(x) = e^{x^2+\sin x} \quad , f:[1,2] \to \mathbb{R}$$

Είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτής της συνάρτησης. Γι' αυτόν τον λόγο υπάρχουν οι προσεγγιστικές μέθοδοι.
Από το Θ. Weirstrass $\exists$ ολοκλήρωμα p : $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$

$\varepsilon = 0,000001 = 10^{-6}$ $\forall x \in [1,2]$

Έχουμε $$\left| \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 p(x)dx \right| = \left| \int_1^2 (f(x) - p(x))dx \right| \le$$

$$\le \sup_{x\in[1,2]} |f(x) - p(x)| (2-1) = \|f-p\|_{[1,2]} \cdot 1 < \varepsilon$$

Στην πράξη αυτή η μέθοδος είναι ασύμφορη και δεν την χρησιμοποιούμε. Αυτό επεκτείνεται και στον $\mathbb{R}^2$ με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Ορισμός: Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ να είναι μια συνάρτηση. Το πολυώνυμο Bernstein βαθμού n της f για $n=1,2,\dots$ συμβολίζεται με $B_n.f$ και είναι το πολυώνυμο

$$B_n.f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad , n=1,2\dots$$

1. Είναι $0 \le k \le n \Rightarrow 0 \le \frac{k}{n} \le 1$, άρα ορίζεται ο αριθμός αυτός

2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = 1\,2\dots n$, $n \ge 2$

Διωνυμικό ανάπτυγμα Αν $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$, $a = 1-x$, $b = x$ τότε: $1 = \sum \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$

Έστω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$.

· Έστω $x \in [0,1]$, $\delta > 0$. Τα n, x, δ είναι σταθεροποιημένα.

Θεωρούμε το σύνολο $J := \{k \in \{0,1,\dots n\} \mid |x - \frac{k}{n}| \geq \delta\}$

Τότε ισχύει ότι (αν $J \neq \emptyset$) η ανισότητα:

$$\sum_{k \in J} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n}$$ (χωρίς απόδειξη)

Θεώρημα Bernstein

· Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ να είναι μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύει $B_{n,f} \xrightarrow{u} f$

Απόδειξη

· Έστω $\varepsilon_0 > 0$. Αφού η f είναι συνεχής και ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής (γνωστό από απειρο). Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας για το $\frac{\varepsilon_0}{2}$ $\exists$ $\delta_0 > 0$ τω να ισχύει:

$\forall x, y \in [0,1]$ με $|x-y| < \delta_0$ ισχύει ότι $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (1)

Για απλότητα συμβολισμών:

$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [0,1] : x = |f(t)|\}$

Έστω $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \geq \frac{\|f\|}{\varepsilon_0 \delta_0^2}$

Γι' αυτό το n_0, θδο ισχύει $\|f(x) - B_{n_0,f}\| < \varepsilon_0$, δηλαδή

$|f(x) - B_{n_0,f}(x)| < \varepsilon_0 \quad , \forall x \in [0,1]$

Έστω $x_0 \in [0,1]$ τυχαίο.

Υπολογίζουμε $|f(x_0) - B_{n_0,f}(x_0)|$ (*)

Έχουμε ότι $1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, για $n = 1, 2, \dots$, $x \in [0,1]$

Το εφαρμόζουμε για n_0 (2)

Πολ/ζουμε τα 2 μέλη με $f(x_0)$ και παίρνουμε $f(x_0) = f(x_0) \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}$

$$\Rightarrow f(x_0) = \sum_{k=0}^{n_0} f(x_0)\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} \quad (3)$$

Έστω $a_i,\ i=0,1,\dots n_0$, $b_i,\ i=0,1,\dots n_0 \in \mathbb{R}$

Τότε $\sum_{i=0}^{n_0} a_i - \sum_{i=0}^{n_0} b_i = (a_0+a_1+\dots+a_{n_0}) - (b_0+b_1+\dots+b_{n_0})$

$$= a_0+a_1+\dots+a_{n_0} + (-b_0-b_1-\dots-b_{n_0})$$

$$= (a_0-b_0)+(a_1-b_1)+\dots+(a_{n_0}-b_{n_0})$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n_0} f(x_0)\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0) - \sum_{k=0}^{n_0} f\left(\frac{k}{n_0}\right)\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-} \right.$$

$$a_i = f(x_0)\binom{n_0}{i} x_0^i (1-x_0)^{n_0-i} \quad i=0,1,\dots n_0$$

$$b_i = f\left(\frac{i}{n_0}\right)\binom{n_0}{i} x_0^i (1-x_0)^{n_0-i}$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n_0} \left(f(x_0)\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n_0} \left(f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right) \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} \left| f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \cdot \left|\binom{n_0}{k}\right| \cdot |x_0^k| \, |(1-x_0)^{n_0-k}| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n_0} \left| f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}$$

γιατί $\binom{n_0}{n} \geq 0$

$\forall k = 0,1,\dots n_0$ και γιατί

$x_0, 1-x_0 \in [0,1]$

Ορίζουμε $J := \{k \in \{0,1,\dots n_0\} : |x_0 - \frac{k}{n_0}| \geq \delta_0\}$

$J_{n_0} = \{0,1,\dots n_0\} \quad J \setminus J_{n_0}$

$$\sum_{k=0}^{n_0} \left| f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}$$

$$= \sum_{k\in J} \left|f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} + \sum_{k\in [n_0]\setminus J} \left|f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \cdot \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}$$

Υποθέτουμε ότι $J \neq \emptyset$ και $[n_0]\setminus J \neq \emptyset$

Έστω $k \in [n_0]\setminus J$. Τότε ισχύει ότι $\left|x_0 - \frac{k}{n_0}\right| < \delta_0$

Τότε από την (1) αφού $x_0, \frac{k}{n_0} \in [0,1]$ έπεται ότι

$$\left|f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\sum_{k\in [n_0]\setminus J} \left|f(x_0) - f\left(\frac{k}{n_0}\right)\right| \cdot \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k} \leq$$

$$\leq \sum_{k\in [n_0]\setminus J} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{k\in [n_0]\setminus J} \binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} \left(\binom{n_0}{k} x_0^k (1-x_0)^{n_0-k}\right)}_{1,\ \text{από διωνυμικό ανάπτυγμα}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

□

#

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Άρα, ορίζεται η σύνθεση $f\circ g: [0,1] \to \mathbb{R}$

Θέτουμε $\phi = f\circ g$. Η ϕ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έστω $\varepsilon_0 > 0$. Από το Θεώρημα Bernstein $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}: |\phi(x) - B_{n_0,\phi}(x)| < \varepsilon_0, \forall x \in [0,1]$ (1). Αλλάζοντας απλώς τον συμβολισμό της μεταβλητής x από x σε t στην (1) έχουμε:

$$|\phi(t) - B_{n_0,\phi}(t)| < \varepsilon_0, \quad \forall t \in [0,1]$$

Έστω $x_0 \in [a,b]$ σταθεροποιημένο. Τότε, $g^{-1}(x_0) \in [0,1]$

Θέτω $t_0 = g^{-1}(x_0) \in [0,1]$ και για το t_0 έχουμε από την (2)

$$|\phi(t_0) - B_{n_0,\phi}(t_0)| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow |\phi(g^{-1}(x_0)) - B_{n_0,\phi}(g^{-1}(x_0))| < \varepsilon_0 \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \phi = f\circ g \\ &\phi\circ g^{-1} = (f\circ g)\circ g^{-1} = f\circ(g\circ g^{-1}) = f\circ id_{[a,b]} = f \end{aligned}\right\} (*)$$

$|(\phi\circ\gamma^{-1})(x_0) - [(B_{n_0,\phi})\circ(\gamma^{-1})](x_0)| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow$

$|f(x_0) - (B_{n_0,\phi}\circ\gamma^{-1})(x_0)| < \varepsilon_0$

--- * --- * ---

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $\gamma(t)=a+t(b-a)$, $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$

$\gamma'(t)=b-a>0$

Άρα, $\gamma\uparrow$. Άρα, η γ είναι "1-1" και επί στο π.τ. $\gamma([0,1])=[a,b]$. Άρα, ορίζεται η $\gamma^{-1}:[a,b]\to[0,1]$ και αν $x\in[a,b]$ τότε $\gamma^{-1}(x)=t$ είναι το μοναδικό $t\in[0,1]: x=\gamma(t)$ $\Leftrightarrow x=a+t(b-a) \Leftrightarrow x-a=t(b-a) \Leftrightarrow t=\frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \gamma^{-1}(x)=\frac{x-a}{b-a}$ $\forall x\in[a,b]$

--- * --- * --- * ---

Θ. Weierstrass

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ να είναι συνεχής συνάρτηση. Τότε $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ πολυώνυμο p ώστε:

$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in[a,b]$

Απόδειξη Θεωρούμε την $\gamma:[0,1]\to[a,b]$ με $\gamma(t)=a+t(b-a)$, $t\in[0,1]$. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Άρα, ορίζεται η σύνθεση $f\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$. Θέτουμε $\phi=f\circ\gamma$. Η ϕ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Έστω $\varepsilon_0>0$. Από το Θ. Bernstein $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: |\phi(x)-B_{n_0,\phi}(x)|<\varepsilon_0$, $\forall x\in[0,1]$ (1). Αλλάζοντας απλά το σύμβολο της μεταβλητής x από x σε t στην (1) έχουμε:

$|\phi(t) - B_{n_0,\phi}(t)| < \varepsilon_0$, $\forall t\in[0,1]$

Έστω $x_0\in[a,b]$ σταθεροποιημένο. Τότε $\gamma^{-1}(x_0)\in[0,1]$. Θέτω $t_0=\gamma^{-1}(x_0)\in[0,1]$ και για το t_0 έχουμε από την (2)

$|\phi(t_0) - B_{n_0,\phi}(t_0)| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow |\phi(\gamma^{-1}(x_0)) - B_{n_0,\phi}(\gamma^{-1}(x_0))| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \phi=f\circ\gamma \\ \phi\circ\gamma^{-1} = (f\circ\gamma)\circ\gamma^{-1} = f\circ(\gamma\circ\gamma^{-1}) = f\circ id_{[a,b]} = f \end{array}\right\} (*)$

$|(\phi\circ\gamma^{-1})(x_0) - [(B_{n_0,\phi})\circ(\gamma^{-1})](x_0)|$ ...

$\Leftrightarrow |f(x_0) - (B_{n_0,\phi} \circ g^{-1})(x_0)| < \varepsilon_0$

Άρα, έχουμε το αποτέλεσμα για $P = B_{n_0\phi} \circ g^{-1}$

$\Leftrightarrow \left| f(x_0) - (B_{n_0,\phi} \circ g^{-1})(x_0) \right| < \varepsilon_0$

Άρα, έχουμε το αποτέλεσμα για $P = B_{n_0} \phi \circ g^{-1}$

∎